5B1134 Matematik och modeller

Fjärde föreläsningen
20 september 2004

Vecka 4

- Optimering - extremvärden
- Numerisk ekvationslösning
  - Newton-Raphson
- Primitiva funktioner
- Modellering
  - Mätfel och feluppskattning
  - Proportionalitet

Optimering - extremvärden

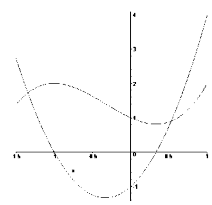
- Om en funktion är deriverbar och har ett lokalt maximum eller minimum måste derivatan i den punkten vara noll.
- För att hitta *lokala extrempunkter* till funktionen f(x) kan vi lösa ekvationen

$$f'(x)=0$$

- Om vi söker *maximum* eller *minimum* på ett intervall måste vi också kontrollera
  - Intervallets ändpunkter
  - Punkter där derivatan inte existerar

Extremvärden, exempel

- Vi ser på exemplet $f(x)=x^3+x^2-x$ där de två nollställena till derivatan $3x^2+2x-1$ motsvarar lokala extrempunkter i $x=-1$ och $x=1/3$.



Numerisk ekvationslösning

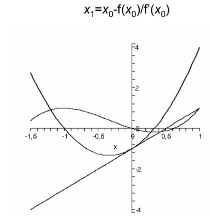
- När vi söker efter ett extremvärde till $f(x)$ behöver vi lösa en ekvation av typen

$$g(x)=0$$

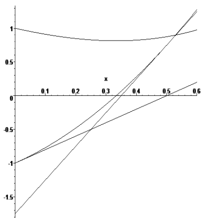
- Om vi inte kan lösa den *analytiskt* behöver vi *numerisk* metod.
- Ett exempel på numerisk metod är *Newton-Raphsons* metod.

Newton-Raphson, steg 1

Följ tangentens riktning från $(x_0,f(x_0))$ till $(x_1,f(x_1))$ där
$x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$



Newton-Raphson, steg 2,3,...



Upprepa detta med

$x_2=x_1-f(x_1)/f'(x_1)$
$x_3=x_2-f(x_2)/f'(x_2)$
$x_4=x_3-f(x_3)/f'(x_3)$

och så vidare

Exempel. Med $f(x)=3x^2+2x-1$ och $x_0=0$ får vi

- $x_0=0.0000000000$
- $x_1=1.0000000000$
- $x_2=0.5000000000$
- $x_3=0.3500000000$
- $x_4=0.3335365854$
- $x_5=0.3333333664$
- $x_6=0.3333333334$
- $x_7=0.3333333334$

Feluppskattning

- Om vi vill räkna ut $f(x)$ och har gjort en mätning av x med ett mätfel Δx kan vi uppskatta felet i $y=f(x)$ genom

$$\Delta y \cong f'(x)\Delta x$$

- **Exempel.** Om vi vill mäta höjden av ett torn kan vi mäta vinkeln, ϕ, från ett visst avstånd. Höjden fås av

$$h=d\cdot\tan\phi$$

Om $d=45$ m, $\phi=20°$ och $\Delta\phi=1°=0{,}017$ radianer får vi att

$$d\Delta h \cong d(1+\tan^2\phi)\Delta\phi = 1{,}5 \text{ m}$$

Proportionalitet

- Om vi har en modell som föreskriver att två storheter är proportionella kan vi med hjälp av mätningar beräkna proportionalitetskonstanten.
- Antag att $y=kx$ och att vi har mätvärden

x	*y*
1,1	2,7
2,3	4,8
3,3	7,4
4,3	9,8
5,9	12,9

- Vilket värde på k passar bäst till dessa data?

Minsta kvadratmetoden

- För att bestämma det bästa värdet på k kan vi välja det som minimerar summan av kvadraterna på avvikelserna, dvs

$$S(k)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-kx_i)^2$$

- Om vi utvecklar $S(k)$ ser vi att vi kan skriva det som

$$S(k)=\sum_{i=1}^{n}(y_i^2-2kx_iy_i+k^2x_i^2)=A-2Bk+Ck^2$$

med $A=\sum_{i=1}^{n}y_i^2,\ B=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\ C=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

Minimum av $S(k)$

- Det minsta värdet av $S(k)$ ges av nollstället till $S'(k)$, dvs av lösningen till

$$S'(k)=-2B+2Ck=0.$$

- Alltså ges det bästa värdet för k av

$$k=\frac{B}{C}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

Exempel

x	*y*	*x*^{2}	*xy*
1,1	2,7	1,14	2,9
2,3	4,8	5,16	10,9
3,3	7,4	10,7	24,1
4,3	9,8	18,6	42,2
5,9	12,9	35,1	76,6
Summa		**70,7**	**156,7**
Kvot			**2,2**